



**„EUROELEKTRA”**  
**Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Elektronicznej**  
**Rok szkolny 2020/2021**

**Zadania z elektrotechniki na zawody III stopnia**

**Rozwiązania**

**Instrukcja dla zdającego**

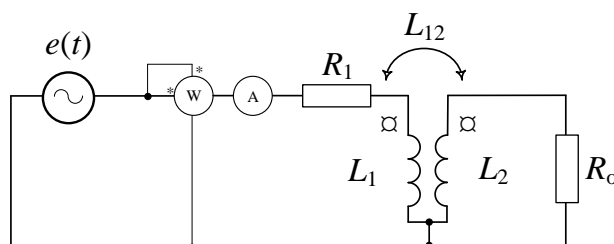
1. Czas trwania zawodów: 120 minut.
2. III stopień Olimpiady zawiera 5 zadań otwartych.
3. Należy podać poprawną odpowiedź wraz z tokiem rozwiązania.
4. Za każdą prawidłową odpowiedź uzyskuje się maksymalnie 10 punktów. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za 5 zadań to 50 punktów.
5. Można korzystać z przyborów do pisania, rozdawanych kart czystopisu i brudnopisu, kalkulatorów i tablic matematycznych. Korzystanie z notebooków, tabletów, telefonów komórkowych, smartfonów, smartwatchy, kalkulatorów programowalnych, itp. jest zabronione.

**Życzymy powodzenia!**

**Zadanie 1**

Na rysunku 1 przedstawiono schemat obwodu elektrycznego. Relację sprzężenia magnetycznego dwóch cewek  $L_1$  i  $L_2$  pokazuje strzałka. Zaciski jednoimienne oznaczono symbolem „\*”. Należy obliczyć wskazania watomierza i amperomierza. W obliczeniach należy przyjąć, że przyrządy pomiarowe są idealne.

Dane są:  $e(t) = 325 \cdot \sin(314 \cdot t)$  V;  $R_1 = 6,00 \, \Omega$ ;  $L_1 = L_2 = 100$  mH;  $L_{12} = 5,00$  mH;  $R_o = 20,0 \, \Omega$ .



Rys. 1

**Rozwiązanie zadania 1**

Z treści zadania wiadomo, że należy obliczyć wskazania watomierza i amperomierza. Dodatkowo wiadomo również, że przyrządy pomiarowe są idealne.

Dane do zadania:

$$e(t) = 325 \cdot \sin(314 \cdot t) \text{ V};$$

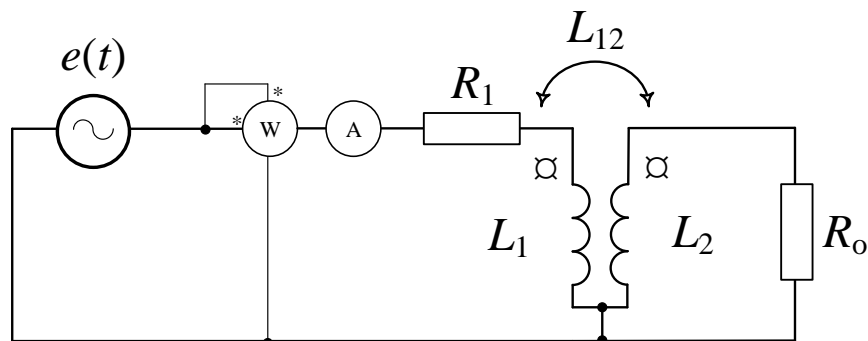
$$R_1 = 6,00 \, \Omega;$$

$$L_1 = L_2 = 100 \text{ mH};$$

$$L_{12} = 5,00 \text{ mH};$$

$$R_o = 20,0 \, \Omega.$$

$$\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

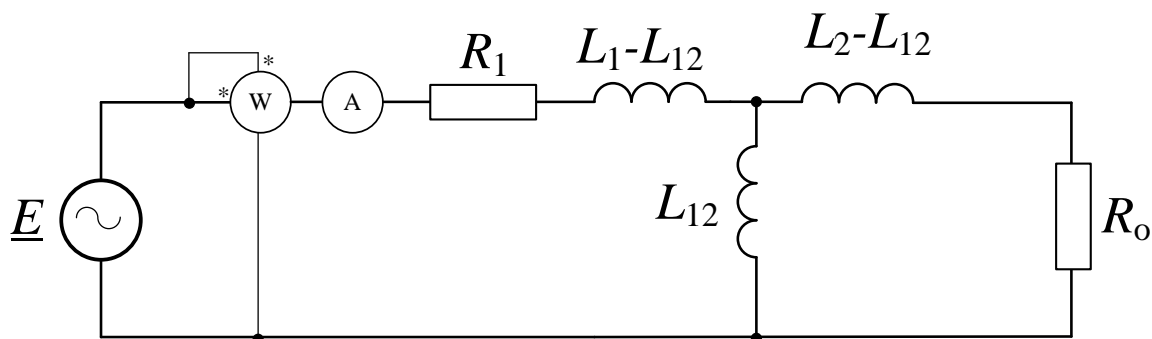


Rys. 1. Schemat analizowanego obwodu elektrycznego, który zawiera sprzężenie magnetyczne

Analizując obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 1 można zauważyć, że cewki sprzężone mają wspólny węzeł. Dodatkowo posiadają one w węźle wspólnym zaciski jednoimienne. Analiza struktury obwodu oraz uwzględnienie położenia początków uzwojeń cewek względem węzła wspólnego umożliwia dokonanie eliminacji sprzężenia magnetycznego. Takie podejście daje możliwość analizowania obwodów elektrycznych z cewkami sprzężonymi metodami stosowanymi przy analizie obwodów bez sprzężeń.

Analizy przedstawione obwodu dokonano przy założeniu, że eliminacja sprzężenia magnetycznego cewek nie może zmienić prądu żadnej gałęzi obwodu ani napięć między punktami zewnętrznymi niepodlegającymi przekształceniom.

Eliminacja sprzężenia magnetycznego prowadzi do obwodu zastępczego przedstawionego na rysunku 2. W gałęziach zawierających cewki pojawiła się indukcyjność wzajemna ze znakiem ujemnym a w gałęzi wspólnej indukcyjność wzajemna ze znakiem plus.



Rys.

2. Schemat analizowanego obwodu elektrycznego po eliminacji sprzężenia magnetycznego

Wartość napięcia źródłowego

$$\underline{E} = \frac{325}{\sqrt{2}} e^{0j} = (230 + 0 \cdot j) \text{ V} = 230 \text{ V}$$

Impedancja zastępcza analizowanego obwodu przedstawionego na rysunku 2

$$\begin{aligned} \underline{Z}_z &= R_1 + j \cdot \omega \cdot (L_1 - L_{12}) + \frac{(R_o + j \cdot \omega \cdot (L_2 - L_{12})) \cdot j \cdot \omega \cdot L_{12}}{R_o + j \cdot \omega \cdot (L_2 - L_{12}) + j \cdot \omega \cdot L_{12}} \\ \underline{Z}_z &= 6,0 + j \cdot 314 \cdot (100 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) + \frac{(20 + j \cdot 314 \cdot (100 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3})) \cdot j \cdot 314 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{20 + j \cdot 314 \cdot (100 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) + j \cdot 314 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \\ \underline{Z}_z &= (6,036 + 31,34 \cdot j) \Omega \end{aligned}$$

Natężenie prądu płynącego od źródła można wyznaczyć z zależności:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_z} = \frac{230}{6,036 + 31,34 \cdot j} = (1,361 - 7,070j) \text{ A}$$

Wartość skuteczna natężenia prądu

$$I = \sqrt{1,361^2 + (-7,070)^2} = 7,200 \text{ A}$$

Moc pobieraną ze źródła napięcia można obliczyć z zależności na moc pozorną zespoloną:

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}^* = 230 \cdot (1,361 - 7,070j)^* = 230 \cdot (1,361 + 7,070j) = (312,8 + 1625j) \text{ VA}$$

Moc czynna pobierana ze źródła wynosi

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = 312,8 \text{ W}$$

**Odpowiedź:**

Amperomierz elektromagnetyczny wskaże wartość  $A = 7,20 \text{ A}$ .

Watomierz elektrodynamiczny wskaże wartości  $W = 313 \text{ W}$ .

**Zadanie 2**

Asynchroniczny silnik klatkowy o danych:  $P_n = 22,0 \text{ kW}$ ,  $n_n = 1460 \text{ obr/min}$ ,  $U_n = 400 \text{ V}$ ,  $M_{kn}/M_n = 3,3$ ,  $\cos \varphi_n = 0,86$ ,  $I_n = 40,3 \text{ A}$ ,  $\eta = 91,6\%$ ,  $s_{kn} = 0,172$  (poślizg krytyczny) jest włączony do sieci o napięciu międzyprzewodowym  $U_n = 400 \text{ V}$  i częstotliwości  $f = 50,0 \text{ Hz}$ . Silnik został obciążony momentem znamionowym. Do sieci elektrycznej, z której zasilany jest silnik został dołączony odbiornik energii elektrycznej o tak dużej mocy, że spowodował obniżenie napięcia zasilającego do wartości  $0,8 \cdot U_n$ . Należy obliczyć prędkość obrotową wirnika tego silnika w stanie ustalonym po tym zdarzeniu. Moment obciążenia oraz częstotliwość napięci sieci się nie zmieniła.

**Rozwiązanie zadania 2**

Z treści zadania wiadomo, że należy obliczyć prędkość obrotową wirnika silnika asynchronicznego klatkowego w stanie ustalonym po obniżeniu się napięcia zasilającego do wartości  $0,8 \cdot U_n$ , które zostało spowodowane dołączeniem do tej sieci odbiornika energii elektrycznej o dużej mocy. Z treści zadania wiadomo, że silnik zasilany jest z sieci o napięciu międzyfazowym  $U_n = 400 \text{ V}$  i częstotliwości  $f = 50,0 \text{ Hz}$  oraz silnik został obciążony momentem znamionowym. Dodatkowo wiadomo, że moment obciążenia oraz częstotliwość napięci sieci się nie zmieniła po obniżeniu się wartości napięcia zasilającego.

Dane znamionowe:

$$P_n = 22,0 \text{ kW},$$

$$n_n = 1460 \text{ obr/min},$$

$$U_n = 400 \text{ V},$$

$$M_{kn}/M_n = 3,3,$$

$$\cos \varphi_n = 0,86,$$

$$I_n = 40,3 \text{ A},$$

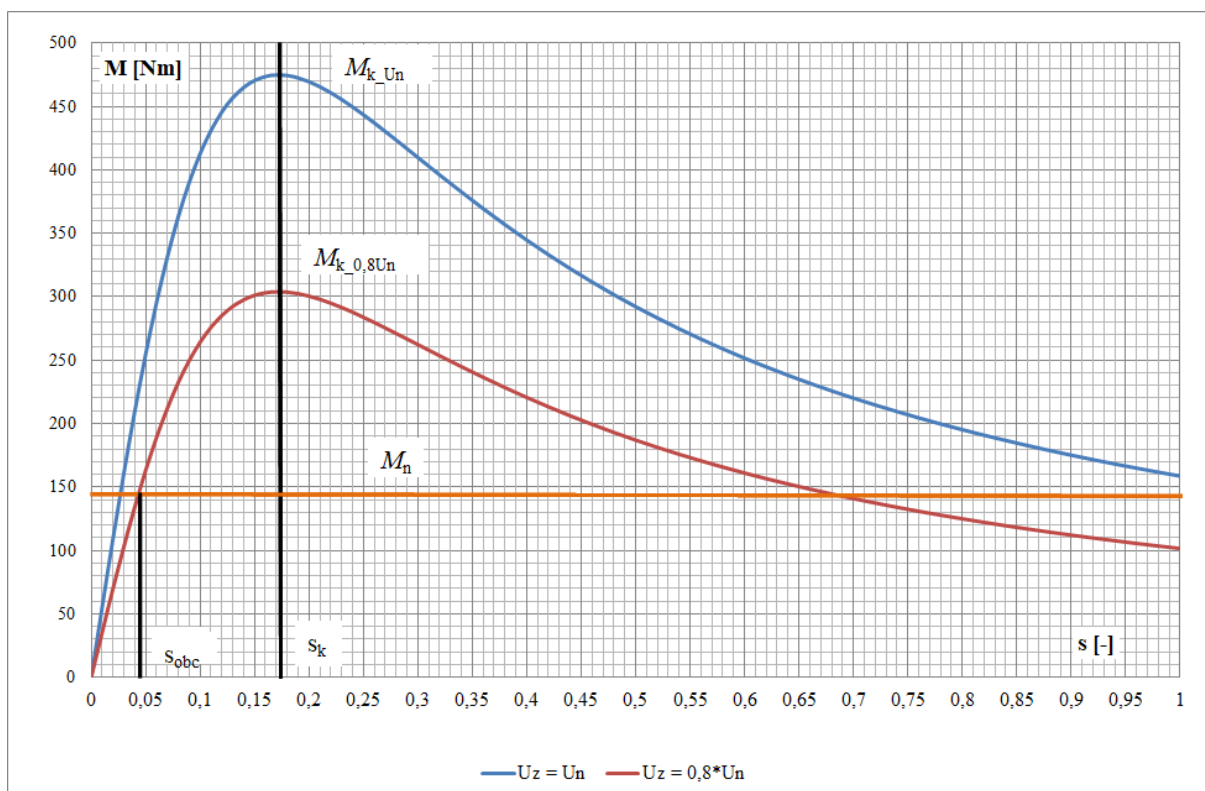
$$\eta = 91,6\%,$$

$$s_{kn} = 0,172 \text{ (poślizg krytyczny)}$$

$$f = 50,0 \text{ Hz}$$

Z charakterystyki mechanicznej silnika, która została przedstawiona na rysunku 1 można zauważyć, że zmiana napięcia do  $0,8U_n$  spowoduje, że prędkość rozwijana przez silnik ulegnie zmniejszeniu. W celu wyznaczenia jej wartości należy, skorzystać z zależności 1

$$n_{obc} = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s_{obc}) \quad (1)$$



Rys. 1. Charakterystyka mechaniczna silnika

Analizując zależność 1 można zauważyć, że do wyznaczenia prędkości rozwijanej przez silnik po obniżeniu się napięcia należy wyznaczyć poślizg  $s_{obc}$  przy momencie hamującym równym momentowi znamionowemu. Ten poślizg można wyznaczyć po przekształceniu równania Klossa (2)

$$\frac{M_n}{M_k} = \frac{2}{\frac{s_{obc}}{s_{kn}} + \frac{s_{kn}}{s_{obc}}} \quad (2)$$

$$s_{obc} = s_{kn} \cdot \left( \frac{M_k}{M_n} - \sqrt{\left( \frac{M_k}{M_n} \right)^2 - 1} \right) \quad (3)$$

gdzie:  $M_n$  – moment hamujący równy momentowi znamionowemu,  $M_k$  – moment krytyczny,  $s_{kn}$  – znamionowy poślizg krytyczny, z charakterystyki mechanicznej (rys. 1.) widać, że jego wartości w przypadku zmiany napięcia zasilającego nie zmieni się. Zmiana napięcia zasilającego wpływa na moment krytyczny rozwijany przez silnik.

W celu wyznaczenia poślizgu  $s_{obc}$  należy wyznaczyć moment hamujący, który równy jest momentowi znamionowemu oraz moment krytyczny.

Moment znamionowy silnika, który wyznacza się z zależności (4)

$$M_n = 9,55 \cdot \frac{P_n}{n_n} = 9,55 \cdot \frac{22000}{1460} = 143,9 \text{ [Nm]} \quad (4)$$

Z teorii maszyn wiadomo, że przy w przypadku, kiedy częstotliwość napięcia zasilającego jest stała to moment krytyczny silnika jest wprost proporcjonalny do kwadratu napięcia zasilającego. Dzięki temu można zapisać zależność na moment krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem znamionowym (5) oraz przy obniżeniu się napięcia zasilającego do wartości  $0,8U_n$  (6).

Moment krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem znamionowym

$$M_{kn} = c \cdot U_n^2 \quad (6)$$

Moment krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem o wartości  $0,8U_n$

$$M_k = c \cdot (0,8 \cdot U_n)^2 \quad (7)$$

Moment krytyczny silnika można wyznaczyć z przeciążalności podanej w danych do zadania. Przeciążalność określona jest zależnością (8)

$$\lambda_n = \frac{M_{kn}}{M_n} \quad (8)$$

$$M_{kn} = \lambda_n \cdot M_n = 3,3 \cdot 143,9 = 474,9 \text{ [Nm]}$$

Z równania (6) wyznaczając kwadrat napięcia znamionowego  $U_n^2 = \frac{M_{kn}}{c}$ , następnie podstawiając do zależności 7 i dokonując przekształceń otrzymujemy zależność na moment krytyczny w przypadku, kiedy silnik zasilany jest napięciem o wartości  $0,8U_n$ , zależność (9)

$$M_k = 0,8^2 \cdot M_{kn} = 0,64 \cdot 474,9 = 303,9 \text{ [Nm]} \quad (9)$$

Po wyznaczeniu wszystkich brakujących danych można wyznaczyć poślizg  $s_{obc}$  przy momencie hamującym równym momentowi znamionowemu, zależność (10)

$$s_{obc} = s_{kn} \cdot \left( \frac{M_k}{M_n} - \sqrt{\left( \frac{M_k}{M_n} \right)^2 - 1} \right) = 0,172 \left( \frac{303,9}{143,9} - \sqrt{\left( \frac{303,9}{143,9} \right)^2 - 1} \right) = 0,0433 \quad (10)$$

Wyznaczony poślizg  $s_{obc}$  należy podstawić do równania 1, który umożliwi wyznaczenie prędkości rozwijanej przez silnik przy przypadku obniżeniu napięcia zasilającego do wartości  $0,8U_n$  oraz przy obciążeniu silnika momentem znamionowym.

$$n_{obc} = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s_{obc})$$

$$n_{obc} = \frac{60 \cdot 50}{2} (1 - 0,0433) = 1435,1 \left[ \frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] \quad (11)$$

### Odpowiedź:

Silnik po obniżeniu napięcia zasilającego do wartości  $0,8U_n$  oraz przy obciążeniu silnika momentem znamionowym  $M_n = 144 \text{ Nm}$  będzie miał prędkość obrotową równą  $1435 \left[ \frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$ .

### Zadanie 3

Maszyna robocza o następujących parametrach  $M_0 = 45 \text{ Nm}$  wymaga napędu silnikiem asynchronicznym klatkowym (układ napędowy bez przekładni mechanicznej). Do napędu maszyny roboczej zastosowano asynchroniczny silnik klatkowy o danych:  $P_n = 10 \text{ kW}$ ,  $n_n = 1460 \text{ obr/min}$ ,  $U_n = 400 / 690 \text{ V}$ ,  $M_{kn}/M_n = 3,5$ ,  $\cos\varphi_n = 0,85$ ,  $I_n = 17,0 \text{ A}$ ,  $\eta = 91,6\%$ ,  $s_{kn} = 0,190$  (poślizg krytyczny). Sieć zasilająca układ napędowy jest siecią publiczną o napięciu znamionowym  $U_n = 400 \text{ V}$ , w związku z tym do rozruchu układu zastosowano przełącznik gwiazda – trójkąt. Należy sprawdzić czy istnieje możliwość rozruchu asynchronicznego silnika klatkowego z obciążeniem o momencie hamującym  $M_0 = 45 \text{ Nm}$ , przy zastosowaniu przełącznika gwiazda – trójkąt oraz określić, jaką prędkość obrotową w stanie ustalonym (po rozruchu) będzie miał wirnik tego silnika po obciążeniu go momentem  $M_0 = 45 \text{ Nm}$ . Po rozruchu, uzwojenia stojana są skojarzone w trójkąt.

### Rozwiązanie zadania 3

Z treści zadania wiadomo, że należy sprawdzić czy istnieje możliwość rozruchu asynchronicznego silnika klatkowego z obciążeniem o momencie hamującym  $M_0 = 45 \text{ Nm}$ , przy zastosowaniu przełącznika gwiazda – trójkąt oraz określić, jaką prędkość obrotową w stanie ustalonym (po rozruchu) będzie miał wirnik tego silnika po obciążeniu go momentem  $M_0 = 45 \text{ Nm}$ . Po rozruchu, uzwojenia stojana są skojarzone w trójkąt.

Dane znamionowe:

$$P_n = 10 \text{ kW},$$

$$n_n = 1460 \text{ obr/min},$$

$$U_n = 400 / 690 \text{ V},$$

$$\begin{aligned}
M_{kn}/M_n &= 3,5, \\
\cos\varphi_n &= 0,85, \\
I_n &= 17,0 \text{ A}, \\
\eta &= 91,6\%, \\
s_{kn} &= 0,190 \text{ (poślizg krytyczny)}
\end{aligned}$$

W celu sprawdzenia czy istnieje możliwość rozruchu asynchronicznego silnika klatkowego z obciążeniem przy zastosowaniu przełącznika gwiazda – trójkąt, należy wyznaczyć moment rozruchowy jaki jest w przypadku połączenia uzwojeń w gwiazdę i w trójkąt. W celu wyznaczania momentu rozruchowego należy przekształcić równanie Klossa (1)

$$M_{kn} = \frac{2}{\frac{s_r}{s_{kn}} + \frac{s_{kn}}{s_r}} \quad (1)$$

gdzie:  $M_r$  – moment rozruchowy,  $M_{kn}$  – moment krytyczny,  $s_{kn}$  – poślizg krytyczny,  $s_r$  – poślizg podczas rozruchu silnika.

Moment rozruchowy w przypadku, gdy uzwojenie stojana skojarzone jest w trójkąt można wyznaczyć z zależności (2)

$$M_{rD} = \frac{2 \cdot M_{kn}}{\frac{s_r}{s_{kn}} + \frac{s_{kn}}{s_r}} \quad (2)$$

gdzie:  $M_{rD}$  – moment rozruchowy w przypadku skojarzenia uzwojeń w trójkąt,  $M_{kn}$  – moment krytyczny znamionowy,  $s_{kn}$  – poślizg krytyczny,  $s_r$  – poślizg podczas rozruchu silnika.

Analizując zależność 2 można zauważyć, że do wyznaczenia momentu rozruchowego w przypadku skojarzenia uzwojeń stojana w trójkąt należy wyznaczyć moment krytyczny znamionowy (jest to moment przy zasilaniu silnika napięciem znamionowym 400 V oraz przy skojarzeniu uzwojeń stojana w trójkąt). W tym celu na początku należy obliczyć moment znamionowy silnika, który wyznacza się z zależności (3)

$$M_n = 9,55 \cdot \frac{P_n}{n_n} = 9,55 \cdot \frac{10000}{1460} = 65,41 \text{ [Nm]} \quad (3)$$

Następnie wykorzystując daną katalogową odnośnie przeciążalności silnika można wyznaczyć moment krytyczny znamionowy, zależność (4)

$$M_{kn} = \lambda_n \cdot M_n = 3,5 \cdot 65,41 = 228,94 \text{ [Nm]} \quad (4)$$

Następnie korzystając z zależności (2) można wyznaczyć moment rozruchowy w przypadku, gdy uzwojenie stojana skojarzone jest w trójkąt. Poślizg w momencie rozruchu należy przyjąć,  $s_r = 1$ .

$$M_{rD} = \frac{2 \cdot M_{kn}}{\frac{s_r}{s_{kn}} + \frac{s_{kn}}{s_r}} = \frac{2 \cdot 228,94}{\frac{1}{0,190} + \frac{0,190}{1}} = 83,96 \text{ [Nm]} \quad (5)$$

Po wyznaczeniu momentu rozruchowego, gdy uzwojenie stojana jest połączone w trójkąt można wyznaczyć moment rozruchowy, gdy uzwojenie stojana jest połączone w gwiazdę. W tym celu można wykorzystać zależność momentu krytycznego od napięcia zasilającego, który przy założeniu, że częstotliwość napięcia zasilającego jest stała to moment krytyczny jest proporcjonalny do kwadratu napięcia zasilającego.

$$\text{Moment krytyczny znamionowy (uzwojenia połączone w gwiazdę)} \quad (6)$$

$$M_{kY} = c \cdot \left( \frac{U_n}{\sqrt{3}} \right)^2$$

Moment krytyczny znamionowy (uzwojenia połączone w trójkąt)

$$M_{kn} = c \cdot U_n^2 \quad (7)$$

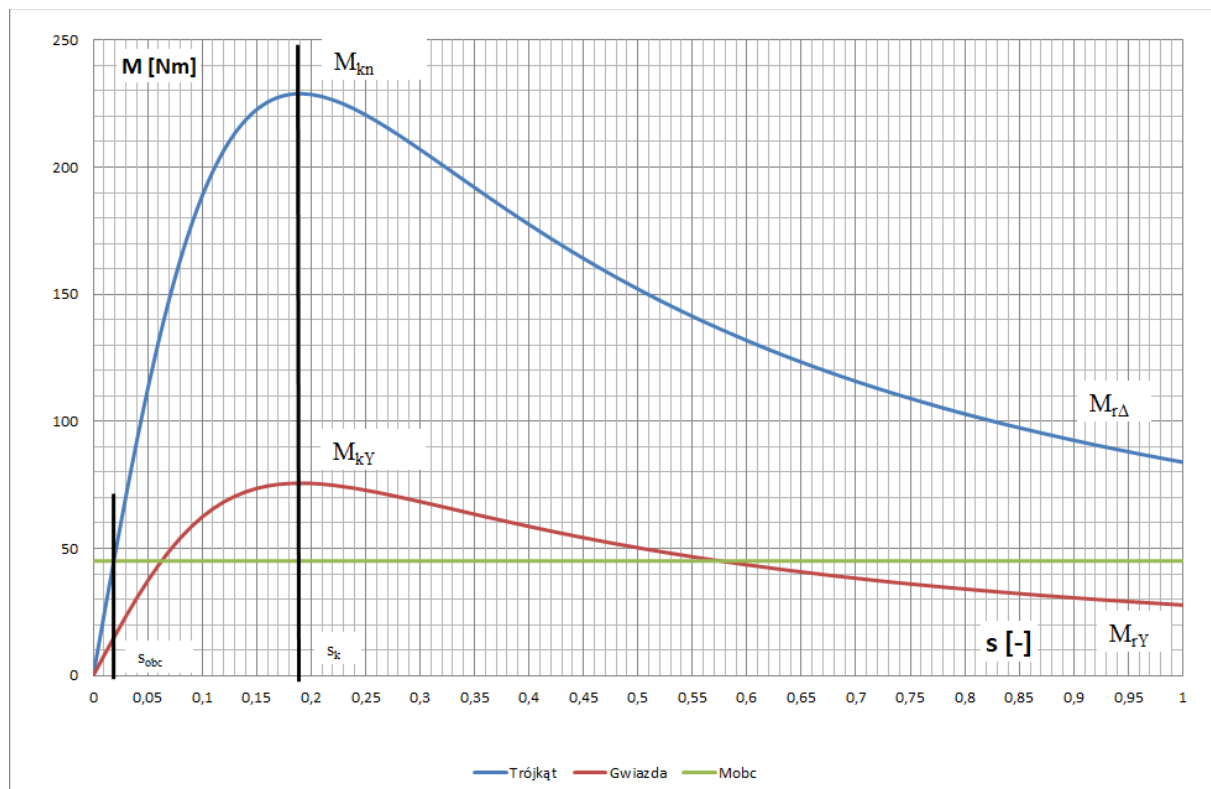
Z równania (7) wyznaczając kwadrat napięcia znamionowego  $U_n^2 = \frac{M_{kn}}{c}$ , następnie podstawiając do zależności 6 i dokonując przekształceń otrzymujemy zależność na moment krytyczny gdy uzwojenie stojana jest połączone w gwiazdę, zależność (8)

$$M_{kY} = \frac{M_{kn}}{3} = \frac{228,94}{3} = 76,31 [\text{Nm}] \quad (8)$$

Moment rozruchowy w przypadku, gdy uzwojenie stojana skojarzone jest w gwiazdę można wyznaczyć z zależności 9)

$$M_{rY} = \frac{2 \cdot M_{kY}}{\frac{s_r}{s_{knY}} + \frac{s_{knY}}{s_r}} \quad (9)$$

Z charakterystyki mechanicznej maszyny przedstawionej na rysunku 1 wynika, że w przypadku kiedy napięcie zasilające silnik się zmieni to nie ma wpływu na wartość poślizgu krytycznego. Łącząc uzwojenia stojana w gwiazdę to napięcie zasilające silnik zmniejszy się a poślizg krytyczny pozostanie ten sam, więc do obliczeń należy przyjąć  $s_{knY} = s_{kn} = 0,190$ .



Rys. 1. Charakterystyka mechaniczna silnika

Po wyznaczeniu wszystkich brakujących danych można wyznaczyć moment rozruchowy w przypadku, gdy uzwojenie stojana skojarzone jest w gwiazdę można wyznaczyć z zależności 9)

$$M_{rY} = \frac{2 \cdot M_{kY}}{\frac{s_r}{s_{knY}} + \frac{s_{knY}}{s_r}} = \frac{2 \cdot 76,31}{\frac{1}{0,190} + \frac{0,190}{1}} = 27,99 [\text{Nm}] \quad (10)$$



**Odpowiedź:**

Asynchroniczny silnik klatkowy rozwija moment rozruchowy przy skojarzeniu uzwojeń w gwiazdę 28 Nm. Asynchroniczny silnik klatkowy rozwija moment rozruchowy przy skojarzeniu uzwojeń w trójkąt 84 Nm. Moment hamujący maszyny roboczej wynosi 45 Nm. Zatem moment hamujący jest większy niż moment rozruchowy w przypadku gdy uzwojenie skojarzone jest w gwiazdę, więc nie ma możliwości rozruchu silnika asynchronicznego z obciążeniem.

Silnik elektryczny z zastosowaniem przełącznika gwiazda – trójkąt można uruchomić bez obciążenia lub nie większym niż 28 Nm. Następnie po rozruchu (uzwojenie stojana połączone jest w trójkąt) można obciążyć go momentem hamującym równym 45 Nm.

W celu określenia jaką prędkość obrotową w stanie ustalonym (po rozruchu) będzie miał wirnik tego silnika po obciążeniu do momentem  $M_{\text{obc}} = 45 \text{ Nm}$ , należy wyznaczyć poślizg  $s_{\text{obc}}$  przy momencie hamującym równym 45 Nm, w tym celu należy przekształcić równanie Klossa (1)

$$\frac{M_{\text{obc}}}{M_{\text{kn}}} = \frac{2}{\frac{s_{\text{obc}}}{s_{\text{kn}}} + \frac{s_{\text{kn}}}{s_{\text{obc}}}} \quad (11)$$

$$s_{\text{obc}} = s_{\text{kn}} \cdot \left( \frac{M_{\text{kn}}}{M_{\text{obc}}} - \sqrt{\left( \frac{M_{\text{kn}}}{M_{\text{obc}}} \right)^2 - 1} \right) \quad (12)$$

$$s_{\text{obc}} = 0,190 \cdot \left( \frac{288,94}{45} - \sqrt{\left( \frac{288,94}{45} \right)^2 - 1} \right) = 0,0189$$

Znając poślizg  $s_{\text{obc}}$  jaki będzie w przypadku pracy silnika przy obciążeniu go momentem  $M_{\text{obc}} = 45 \text{ Nm}$  można obliczyć z zależności (13) jaką będzie rozwijał prędkość obrotową.

$$\begin{aligned} n_{\text{obc}} &= \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s_{\text{obc}}) \\ n_{\text{obc}} &= \frac{60 \cdot 50}{2} (1 - 0,0189) = 1471,7 \left[ \frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

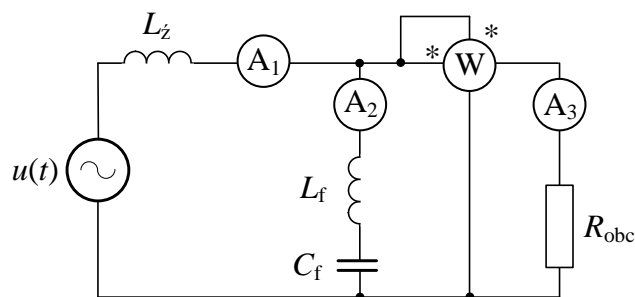
**Odpowiedź:**

W stanie ustalonym (po rozruchu) wirnik silnika po obciążeniu do momentem  $M_{\text{obc}} = 45 \text{ Nm}$  będzie miał prędkość obrotową równą  $1472 \left[ \frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$ .

**Zadanie 4**

Odbiornik o rezystancji  $R_{\text{obc}} = 80 \, \Omega$  zasilany jest z rzeczywistego źródła napięcia odkształconego  $u(t) = (325 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \pi/6) + 162 \cdot \sin(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/3)) \text{ V}$ . Między rzeczywistym źródłem a odbiornikiem włączono filtr. Reaktancja źródła dla pewnej częstotliwości  $f$  wynosi  $X_{L\zeta} = 40 \, \Omega$ . Reaktancja indukcyjna i pojemnościowa filtra dla tej częstotliwości są równe odpowiednio  $X_{Lf} = 10 \, \Omega$  i  $X_{Cf} = 90 \, \Omega$ . Oblicz wskazania idealnych amperomierzy elektromagnetycznych oraz wskazanie idealnego watomierza elektrodynamicznego. Schemat analizowanego obwodu przedstawiono na rysunku 2.

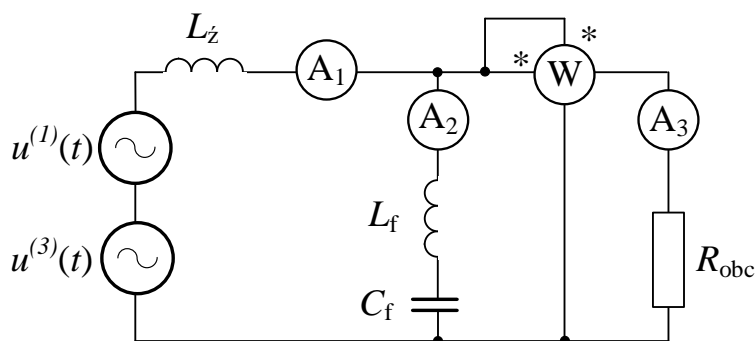




Rys. 2

#### Rozwiązanie zadania 4

Z treści zadania wiadomo, że należy wyznaczyć wskazania idealnych amperomierzy elektromagnetycznych oraz wskazanie idealnego watomierza elektrodynamicznego przy zasilaniu napięciem odkształconym. W tym celu odkształcone napięcie należy zastąpić przez dwa źródła napięcia - pierwsza harmoniczna  $u^{(1)}(t)$  oraz trzecia harmoniczna  $u^{(3)}(t)$  tak jak pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat analizowanego obwodu elektrycznego

Prądy wywołane przez każde źródło napięcia będą wyznaczane osobno a więc należy rozpatrzyć dwa obwody, tak jak przedstawiono na rysunku 2 i 3.

#### Dane wejściowe:

$$X_{L_f} = 10 \, \Omega \text{ dla częstotliwości } f$$

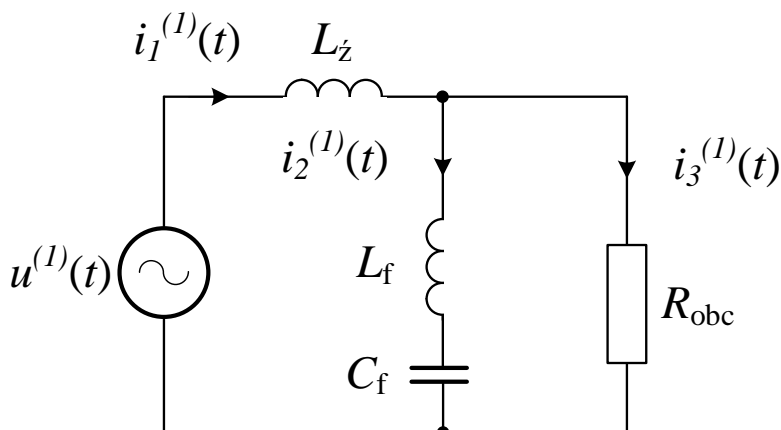
$$X_{C_f} = 90 \, \Omega \text{ dla częstotliwości } f$$

$$X_{L_z} = 40 \, \Omega \text{ dla częstotliwości } f$$

$$R_{obc} = 80 \, \Omega$$

$$u(t) = (325 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \pi/6) + 162 \cdot \sin(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/3)) \text{ V}$$

#### 1. Obliczenia dla pierwszej harmonicznej napięcia



Rys 2. Schemat analizowanego obwodu dla pierwszej harmonicznej napięcia

Impedancja zastępcza analizowanego obwodu dla pierwszej harmonicznej napięcia

$$\underline{Z}_z^{(1)} = X_z^{(1)} + \frac{R_{\text{odb}} \cdot j(X_{\text{Lf}}^{(1)} - X_{\text{Cf}}^{(1)})}{R_{\text{odb}} + j(X_{\text{Lf}}^{(1)} - X_{\text{Cf}}^{(1)})} = 40 + \frac{80 \cdot j(10 - 90)}{80 + j(10 - 90)} = 40 \Omega$$

Natężenie prądu płynącego od źródła można wyznaczyć z zależności:

$$\underline{I}_1^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{\underline{Z}_z^{(1)}} = \frac{\frac{325}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}}}{40} = (4,976 + 2,873j) \text{ A}$$

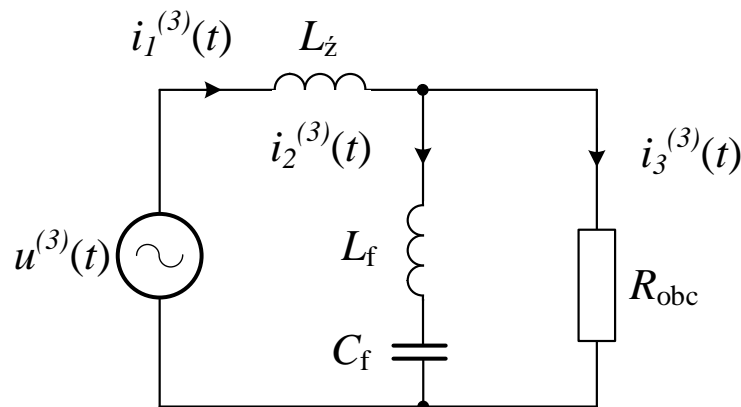
Z dzielnika prądu można wyznaczyć natężenie prądu płynącego przez dwójnik LC

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \cdot \frac{R_{\text{odb}}}{R_{\text{odb}} + j(X_{\text{Lf}}^{(1)} - X_{\text{Cf}}^{(1)})} = (1,052 + 3,924j) \text{ A}$$

Z I Prawa Kirchhoffa można wyznaczyć natężenie prądu płynącego przez odbiornik  $I_3^{(1)}$

$$\underline{I}_3^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} - \underline{I}_2^{(1)} = (3,924 - 1,052j) \text{ A}$$

## 2. Obliczenia dla trzeciej harmonicznej napięcia



Rys 3. Schemat analizowanego obwodu dla trzeciej harmonicznej napięcia

Impedancja zastępcza analizowanego obwodu dla trzeciej harmonicznej napięcia

$$\underline{Z}_z^{(3)} = X_z^{(3)} + \frac{R_{\text{odb}} \cdot j(X_{\text{Lf}}^{(3)} - X_{\text{Cf}}^{(3)})}{R_{\text{odb}} + j(X_{\text{Lf}}^{(3)} - X_{\text{Cf}}^{(3)})} = 3 \cdot 40 + \frac{80 \cdot j\left(3 \cdot 10 - \frac{90}{3}\right)}{80 + j\left(3 \cdot 10 - \frac{90}{3}\right)} = 120j \Omega$$

Natężenie prądu płynącego od źródła można wyznaczyć z zależności:

$$\underline{I}_1^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{\underline{Z}_z^{(3)}} = \frac{\frac{162}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}}}{120j} = (-0,8267 - 0,4773j) \text{ A}$$

Z dzielnika prądu można wyznaczyć natężenie prądu płynącego przez dwójnik LC

$$\underline{I}_2^{(3)} = \underline{I}_1^{(3)} \cdot \frac{R_{\text{odb}}}{R_{\text{odb}} + j(X_{\text{Lf}}^{(3)} - X_{\text{Cf}}^{(3)})} = (-0,8267 - 0,4773j) \text{ A}$$

Z I Prawa Kirchhoffa można wyznaczyć natężenie prądu płynącego przez odbiornik  $I_3^{(3)}$

$$\underline{I}_3^{(3)} = \underline{I}_1^{(3)} - \underline{I}_2^{(3)} = (0,0 - 0,0j) \text{ A}$$

Wartość jaką wskażą amperomierze wyznacza się z zależności:

$$I_{A1} = \sqrt{I_1^{(1)2} + I_1^{(3)2}} = \sqrt{5,745^2 + 0,9546^2} = 5,824 \text{ A}$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_2^{(1)2} + I_2^{(3)2}} = \sqrt{4,063^2 + 0,9546^2} = 4,173 \text{ A}$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_3^{(1)2} + I_3^{(3)2}} = \sqrt{4,063^2 + 0,0^2} = 4,063 \text{ A}$$

Wartość jaką wskaże watomierz elektrodynamiczny wyznacza się z zależności:

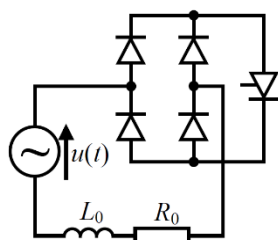
$$P_W = R_{\text{abc}} \cdot (I_3^{(1)})^2 + R_{\text{abc}} \cdot (I_3^{(3)})^2 = 80 \cdot 4,063^2 + 80 \cdot 0,0^2 = 1320,64 \text{ W}$$

### Odpowiedź:

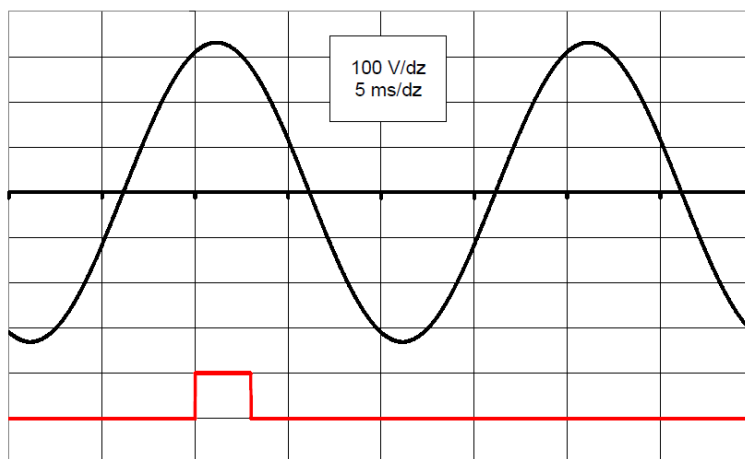
Amperomierze elektromagnetyczne wskażą wartości  $A_1 = 5,82 \text{ A}$ ,  $A_2 = 4,17 \text{ A}$ ,  $A_3 = 4,06 \text{ A}$ .  
Watomierz elektrodynamiczny wskaże wartości  $W = 1321 \text{ W}$ .

### Zadanie 5

Na rysunku 3 przedstawiono schemat obwodu elektrycznego, w którym odbiornik w postaci szeregowego połączenia rezystora i cewki jest zasilany ze źródła napięcia przez energoelektroniczny łącznik prądu przemiennego. Dana jest rezystancja  $R_0 = 10,3 \Omega$  oraz indukcyjność  $L_0 = 25,1 \text{ mH}$ . Na rysunku 4 pokazano oscylogram napięcia zasilającego oraz logiczny sygnał wyzwalania tyrystora. Należy wyznaczyć wzór na natężenie prądu płynącego przez odbiornik w pokazanym na oscylogramie przedziale czasu oraz naszkicować (z zaznaczeniem odpowiedniej skali) przebieg czasowy tego natężenia. W rozwiązaniu należy traktować wszystkie elementy jako idealne.



Rys. 3

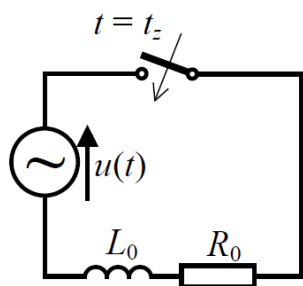


Rys. 4

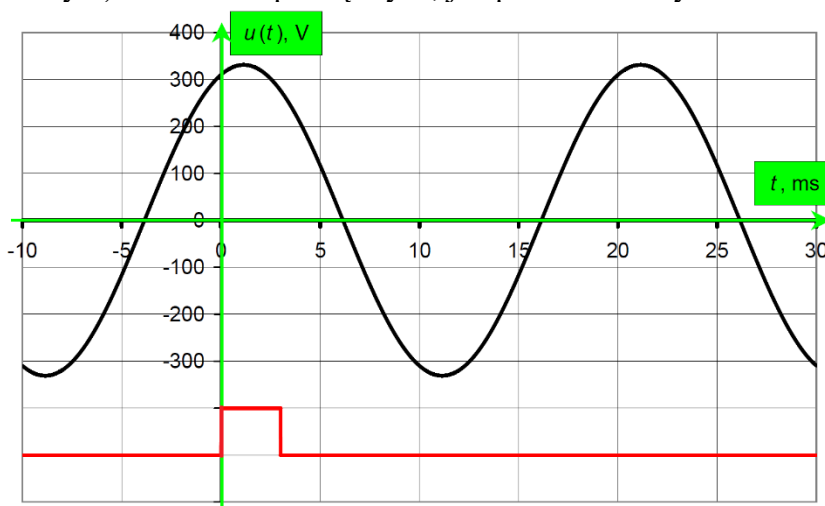
### Rozwiązanie zadania 5

Jeżeli wszystkie elementy są idealne, to można traktować energoelektroniczny łącznik prądu przemiennego jako zwykły łącznik. Wówczas można rozpatrywać schemat zastępczy przedstawiony na rysunku R5.1.

Żeby zapisać analityczną postać równania napięcia źródłowego oscylogram osadzamy w wybranym arbitralnie (wyskalowanym) układzie współrzędnych, jak pokazano na rysunku R5.2.



Rys. R5.1.



Rys. R5.2.

W tych warunkach łącznik zamyka się w czasie  $t_z = 0$ , a otwiera po osiągnięciu przez prąd płynący w tym obwodzie natężenia równego 0. Natomiast wzór na wartość chwilową napięcia źródłowego jest następujący

$$u(t) = U_m \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t + \psi_u\right), \quad (R5.1)$$

gdzie:  $U_m$  jest amplitudą napięcia, której wartość odczytujemy wprost z przebiegu pokazanego na rysunku R5.2 ( $U_m = 330 \text{ V}$ );  $T$  jest okresem napięcia źródłowego, który również możemy bezpośrednio odczytać z przebiegu na rysunku R5.2 ( $T = 20,0 \text{ ms}$ );  $\psi_u$  jest fazą początkową przebiegu napięcia źródłowego, którą obliczamy wyznaczając najpierw, z przebiegu na rysunku R5.2, wyprzedzenie sinusoidy napięcia względem początku przyjętego układu współrzędnych ( $t_\psi = 3,85 \text{ ms}$ ), a następnie korzystając ze wzoru  $\psi_u = \omega \cdot t_\psi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t_\psi$ , podstawiając dane

$$\psi_u = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{20,0} \cdot 3,85 \text{ otrzymujemy wartość } \psi_u = 1,21 \text{ rad.}$$

Zatem, wzór na wartość chwilową napięcia źródłowego jest następujący

$$u(t) = 330 \cdot \sin(314 \cdot t + 1,21) \text{ V.} \quad (R5.2)$$

#### UWAGA

Do tego miejsca obliczenia były wykonywane na podstawie danych odczytanych z przebiegu pokazanego na rysunku. Zatem, ze względu na możliwość odczytu wartości wyniki przejściowe, do dalszej analizy zapisujemy z trzema cyframi znaczącymi, a nie pięcioma (o dwie cyfry znaczące więcej niż wartości w wynikach końcowych) jak wynika z ogólnych zasad.

Wzór na natężenie prądu płynącego przez odbiornik jest następujący

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leq 0 \\ i_u(t) + i_p(t), & \text{dla } t \in [0, t_0] \\ 0, & \text{dla } t > t_0 \end{cases}, \quad (R5.3)$$

gdzie:  $i_u(t)$  składowa ustalona natężenia prądu,  $i_p(t)$  składowa przejściowa natężenia prądu,  $t_0$  czas w którym wartość natężenia prądu jest równa 0.

Składową ustaloną natężenia prądu wyznaczamy z analizy stanu ustalonego po zamknięciu styków łącznika, otrzymując następujący wzór

$$i_u(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R_0^2 + (\omega \cdot L_0)^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u - \varphi). \quad (R5.4)$$

Kąt  $\varphi$  jest kątem przesunięcia sinusoidy natężenia prądu względem sinusoidy napięcia na zaciskach dwójnika w stanie ustalonym. Można go obliczyć z następującego wzoru

$$\varphi = \text{atg}\left(\frac{\omega \cdot L_0}{R_0}\right). \quad (R5.5)$$

Składową ustaloną natężenia prądu wyznaczamy z analizy stanu ustalonego po zamknięciu styków łącznika, otrzymując następujący wzór

$$i_p(t) = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (R5.6)$$

gdzie  $I_1$  jest wartością stałą,  $\tau$  jest stałą czasową rozpatrywanego obwodu wyrażoną wzorem

$$\tau = \frac{L_0}{R_0}. \quad (R5.7)$$

Stałą wartość  $I_1$  obliczamy korzystając z ogólnego wzoru na natężenie prądu (środkowe wyrażenie we wzorze (R5.3)) dla czasu  $t_z = 0$  oraz z prawa komutacji, na podstawie którego wiadomo, że natężenie prądu płynącego przez cewkę nie może ulegać skokowej zmianie. Jeżeli przed komutacją (zamknięciem styków łącznika) natężenie prądu było równe 0, to w chwili  $0^+$  (chwila komutacji, ale już po zamknięciu łącznika) wartość natężenia tego prądu również będzie równa 0. Stąd następujące równanie

$$i(0^+) = \frac{U_m}{\sqrt{R_0^2 + (\omega \cdot L_0)^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot 0^+ + \psi_u - \operatorname{atg}\left(\frac{\omega \cdot L_0}{R_0}\right)\right) + I_1 \cdot e^{-\frac{0^+ \cdot R_0}{L_0}} = 0, \quad (\text{R5.8})$$

z którego wyznaczamy wartość stałą

$$I_1 = -\frac{U_m}{\sqrt{R_0^2 + (\omega \cdot L_0)^2}} \cdot \sin\left(\psi_u - \operatorname{atg}\left(\frac{\omega \cdot L_0}{R_0}\right)\right). \quad (\text{R5.9})$$

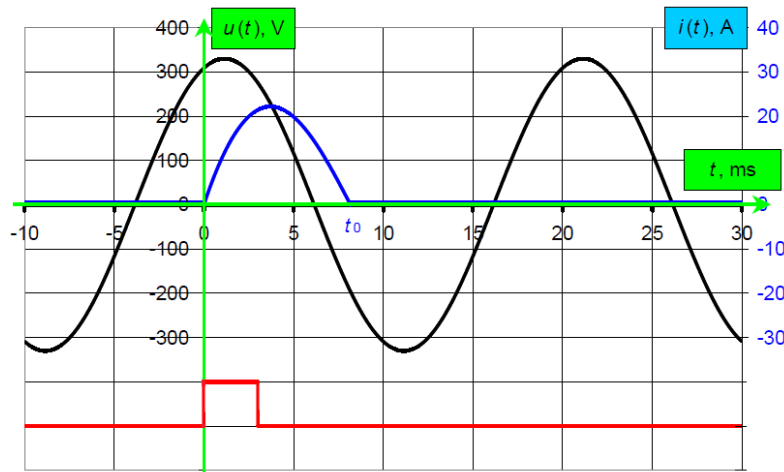
Podstawiając dane

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leq 0 \\ \frac{330}{\sqrt{10,3^2 + (314 \cdot 0,0251)^2}} \cdot \sin\left(314 \cdot t + 1,21 - \operatorname{atg}\left(\frac{314 \cdot 0,0251}{10,3}\right)\right) + \\ - \frac{330}{\sqrt{10,3^2 + (314 \cdot 0,0251)^2}} \cdot \sin\left(1,21 - \operatorname{atg}\left(\frac{314 \cdot 0,0251}{10,3}\right)\right) \cdot e^{-\frac{t \cdot 10,3}{0,0251}}, & \text{dla } t \in [0, t_0] \\ 0, & \text{dla } t > t_0 \end{cases}, \quad (\text{R5.10})$$

otrzymujemy następujący wzór na natężenie prądu płynącego przez odbiornik w pokazanym na oscylogramie przedziale czasu

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leq 0 \\ 25,4 \cdot \sin(314 \cdot t + 0,557) - 13,4 \cdot e^{-410 \cdot t} \text{ A}, & \text{dla } t \in [0, t_0] \\ 0, & \text{dla } t > t_0 \end{cases}. \quad (\text{R5.11})$$

Przebieg natężenia prądu pokazano na rysunku R5.3.



Rys. R5.3.

<p><b>Opracowali:</b> dr hab. inż. Sławomir Cieślík, prof. UTP dr inż. Zbigniew Kłosowski</p>	<p><b>Sprawdził:</b> dr hab. inż. Sławomir Cieślík, prof. UTP</p>	<p><b>Zatwierdził:</b> Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady dr hab. inż. Sławomir Cieślík, prof. UTP</p>
---	---	--