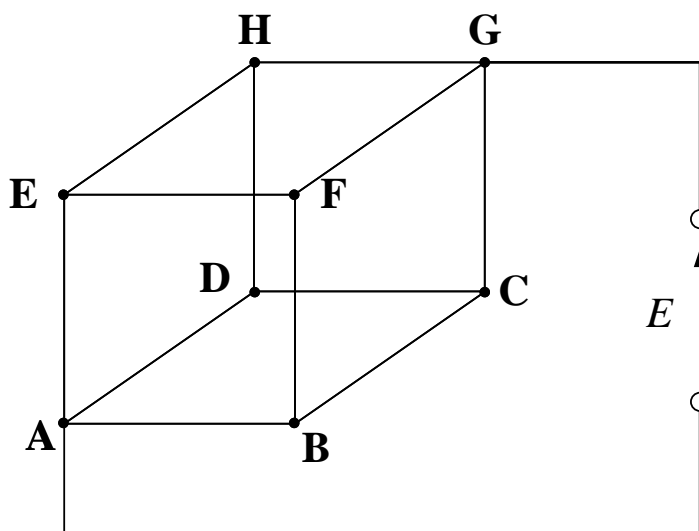


**„EUROELEKTRA”**  
**Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy Elektrycznej i Energetycznej**  
**Rok szkolny 2024/2025**

**Rozwiązania zadań dla grupy elektrycznej na zawody II stopnia**

**Zadanie 1**

Z drutu miedzianego o polu przekroju  $s = 0,10 \text{ mm}^2$  wykonano szkielet sześcienny. Długość krawędzi sześciangu wynosi  $a = 10 \text{ cm}$ . Przewody zasilające wykonano z miedzi o tym samym przekroju, każdy z nich ma długość  $b = 20 \text{ cm}$ . Oblicz natężenie prądu płynącego ze źródła o wartości  $E = 1,0 \text{ V}$ . Opór właściwy miedzi wynosi  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ .

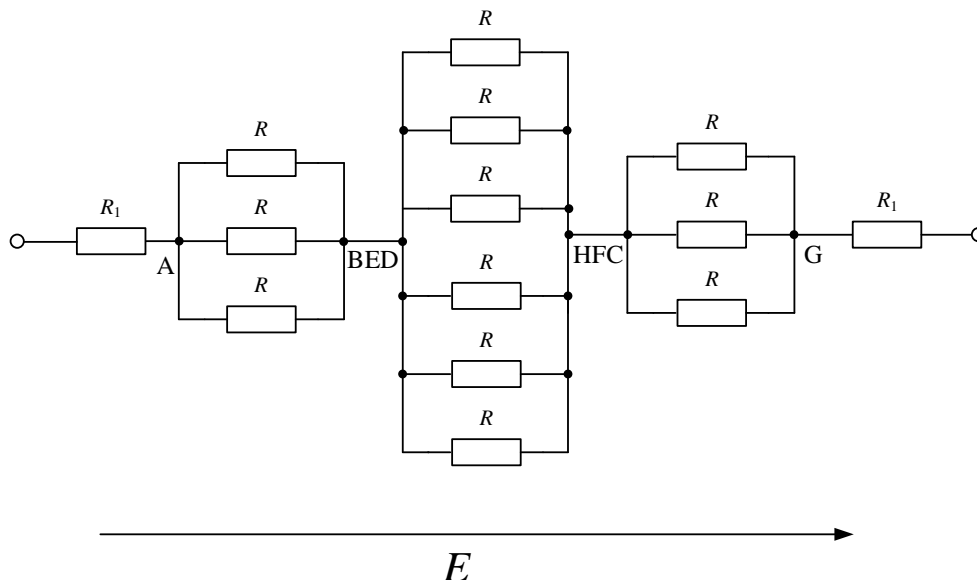


Rysunek 1. Analizowany obwód elektryczny

## Rozwiązanie

W tym obwodzie krawędzie AB, AE i AD są równe, natężenie prądu w tych gałęziach jest takie samo. Ponadto potencjał w punktach B, E, D jest taki sam. Opór całego sześciangu nie zmienia się przez połączenie tych punktów w jeden. Taka sama sytuacja dotyczy punktów H, F, C. Połączmy punkty B, E i D w jednym węźle oraz H, F i C w następnym.

Na rysunku 2 obwód przedstawiono na płaszczyźnie. Każdy bok sześciangu został przedstawiony jako rezystor o wartości  $R$ . Dodatkowo na rysunku uwzględniono rezystory o wartości  $R_1$  przedstawiające przewody doprowadzające.



Rysunek 2. Analizowany obwód elektryczny na płaszczyźnie

Rezystancja zastępcza widziana pomiędzy zaciskami AG można wyznaczyć z zależności:

$$R_{AG} = \frac{1}{3}R + \frac{1}{6}R + \frac{1}{3}R = \frac{5}{6}R$$

Rezystancja zastępcza widziana pomiędzy zaciskami zasilającymi można wyznaczyć z zależności:

$$R_Z = R_1 + \frac{5}{6}R + R_1 = \rho \frac{b}{s} + \rho \frac{5 \cdot a}{6 \cdot s} + \rho \frac{b}{s} = \frac{\rho}{s} \left( 2 \cdot b + \frac{5}{6}a \right)$$

$$R_Z = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}]}{0,1 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2]} \left( 2 \cdot \frac{20}{100} + \frac{5}{6} \cdot \frac{10}{100} \right)$$

$$R_Z = 0,0822 \Omega$$

Natężenie prądu płynącego ze źródła o wartości  $E = 1,0 \text{ V}$  wynosi:

$$I = \frac{E}{R_Z} = \frac{1,0}{0,0822} = 12,165 \text{ A}$$

## Odpowiedź

Natężenie prądu płynącego ze źródła o wartości  $E = 1,0 \text{ V}$  wynosi 12,2 A.

## Zadanie 2

Silnik asynchroniczny dwubiegowy o danych znamionowych:

Bieg I:  $P_{NbI} = 7,5 \text{ kW}$ ,  $U_{NbI} = 400 \text{ V}$  ( $\Delta$ ),  $n_{NbI} = 1460 \text{ obr/min}$ ,  $f_{NbI} = 50,0 \text{ Hz}$ ,  $I_{NbI} = 14,8 \text{ A}$ ,  
 $\lambda_{MbI} = 2,30$ ,  $\cos\varphi_{NbI} = 0,84$ ,  $\eta_{NbI} = 0,87$ , praca S1

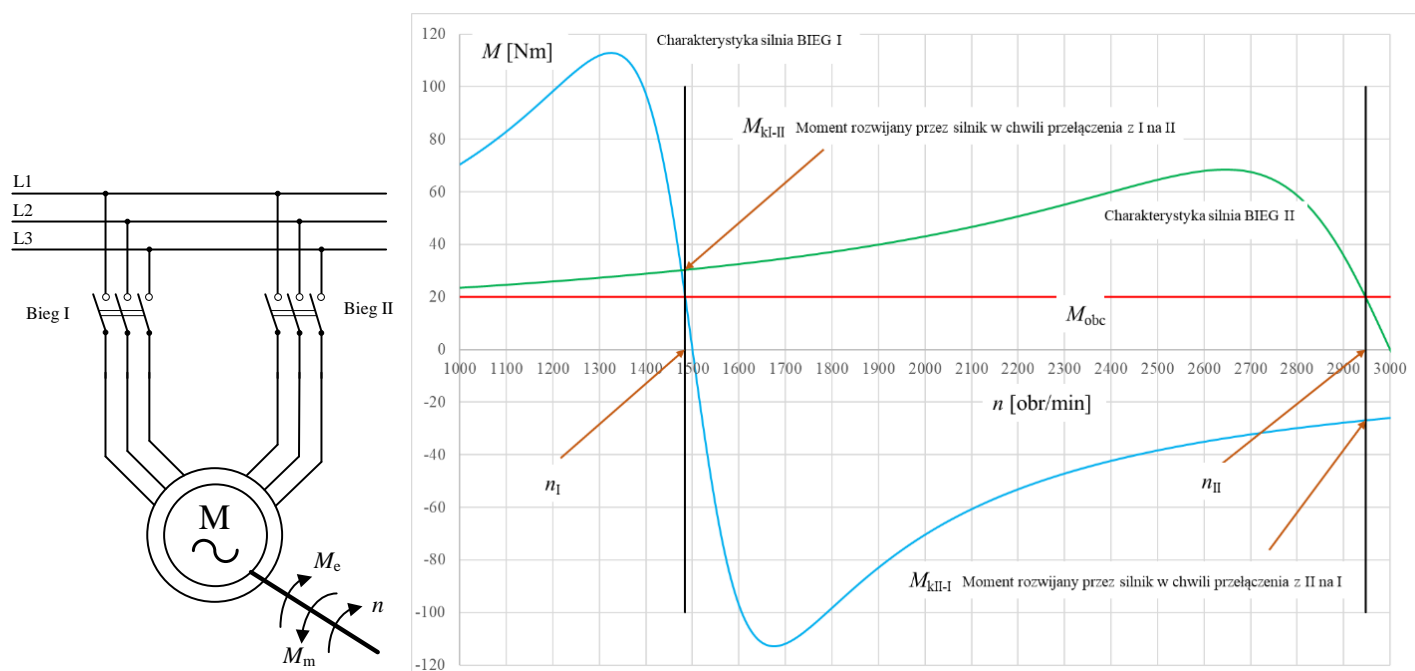
Bieg II:  $P_{NbII} = 9,5 \text{ kW}$ ,  $U_{NbII} = 400 \text{ V}$  ( $\Delta$ ),  $n_{NbII} = 2915 \text{ obr/min}$ ,  $f_{NbII} = 50,0 \text{ Hz}$ ,  $I_{NbII} = 17,3 \text{ A}$ ,  
 $\lambda_{MbII} = 2,20$ ,  $\cos\varphi_{NbII} = 0,93$ ,  $\eta_{NbII} = 0,85$ , praca S1

obciążony jest stałym momentem mechanicznym  $M_{obc} = 20,0 \text{ Nm}$ . Schemat podłączenia silnika do sieci oraz charakterystykę mechaniczną tego silnika przedstawiono na rysunku 2.

Obliczyć:

1. prędkości obrotowe na poszczególnych biegach silnika przy obciążeniu momentem mechanicznym równym  $20,0 \text{ Nm}$ ,
2. sprawność silnika na poszczególnych jego biegach przy obciążeniu momentem mechanicznym równym  $20,0 \text{ Nm}$ ,
3. momenty elektromagnetyczne rozwijane przez silnik w chwilach przełączeń z biegu I na II (na charakterystyce oznaczono go jako  $M_{kI-II}$ ) oraz z biegu II na I (na charakterystyce oznaczono go jako  $M_{kII-I}$ ).

Wyznaczając sprawność należy pominąć wszystkie straty w obwodzie stojana oraz straty mechaniczne silnika. Silnik na każdym biegu zasilany jest z sieci, w której jest zgodna kolejność faz. Należy również założyć symetrię charakterystyk mechanicznej maszyny dla stanów pracy silnikowej i prądnicowej.



Rysunek 3. Schemat podłączenia silnika do sieci oraz charakterystyka mechaniczna tego silnika dla każdego z biegów

## Rozwiązanie

Podstawowe parametry dwubiegunowego silnika asynchronicznego:

- bieg pierwszy:

$$\begin{aligned}M_{NbI} &= 9,55 \cdot \frac{P_{NbI}}{n_{NbI}} = 49,0582 \text{ Nm} \\M_{MbI} &= \lambda_{MbI} \cdot M_{NbI} = 112,8339 \text{ Nm} \\n_{obI} &= 60 \cdot \frac{f_{NbI}}{2} = 1500 \frac{\text{obr}}{\text{min}} \\s_{NbI} &= \frac{n_{obI} - n_{NbI}}{2} = 0,0267 \\s_{MbI} &= s_{NbI} \cdot \left( \lambda_{MbI} + \sqrt{\lambda_{MbI}^2 - 1} \right) = 0,1166\end{aligned}$$

- bieg drugi:

$$\begin{aligned}M_{NbII} &= 9,55 \cdot \frac{P_{NbII}}{n_{NbII}} = 31,1235 \text{ Nm} \\M_{MbII} &= \lambda_{MbII} \cdot M_{NbII} = 68,4717 \text{ Nm} \\n_{obII} &= 60 \cdot \frac{f_{NbII}}{2} = 3000 \frac{\text{obr}}{\text{min}} \\s_{NbII} &= \frac{n_{obII} - n_{NbII}}{2} = 0,0283 \\s_{MbII} &= s_{NbII} \cdot \left( \lambda_{MbII} + \sqrt{\lambda_{MbII}^2 - 1} \right) = 0,1179\end{aligned}$$

Poślizgi na poszczególnych biegach silnika dla momentu obciążenia  $M_{obc}$  i prędkość obrotowa:

- bieg pierwszy:

$$\begin{aligned}\lambda_{bI} &= \frac{M_{MbI}}{M_{obc}} = 5,6417 \\s_{bI} &= s_{MbI} \cdot \left( \lambda_{bI} + \sqrt{\lambda_{bI}^2 - 1} \right) = 0,0104 \\n_{bI} &= n_{obI} \cdot (1 - s_{bI}) = 1484,38 \frac{\text{obr}}{\text{min}}\end{aligned}$$

- bieg drugi:

$$\begin{aligned}\lambda_{bII} &= \frac{M_{MbII}}{M_{obc}} = 3,4236 \\s_{bII} &= s_{MbII} \cdot \left( \lambda_{bII} + \sqrt{\lambda_{bII}^2 - 1} \right) = 0,0176 \\n_{bII} &= n_{obII} \cdot (1 - s_{bII}) = 2947,21 \frac{\text{obr}}{\text{min}}\end{aligned}$$

W następnym kroku należało obliczyć sprawność, pomijając wszystkie straty w obwodzie stojana oraz straty mechaniczne silnika:

- bieg pierwszy:

$$\eta_{bI} = 1 - s_{bI} = 0,9896$$

- bieg drugi:

$$\eta_{bII} = 1 - s_{bII} = 0,9824$$

Kolejnym krokiem będzie obliczenie poślizgu silnika w chwilach przełączenia:

- z biegu 1 na II:

$$s_{bI-II} = \frac{n_{obII} - n_{bI}}{n_{obII}} = 0,5052$$

- z biegu I na II:

$$s_{bI-II} = \frac{n_{obI} - n_{bII}}{n_{obI}} = -0,9648$$

Moment silnika w chwilach przełączenia:

- z biegu I na II:

$$M_{bI-II} = \frac{2 \cdot M_{MbII}}{\frac{s_{bI-II}}{s_{MbII}} + \frac{s_{MbII}}{s_{bI-II}}} = 30,2975 \text{ Nm}$$

- z biegu I na II:

$$M_{bII-I} = \frac{2 \cdot M_{MbI}}{\frac{s_{bII-I}}{s_{MbI}} + \frac{s_{MbI}}{s_{bII-I}}} = -26,8725 \text{ Nm}$$

### **Odpowiedź**

Prędkości obrotowe na poszczególnych biegach silnika przy obciążeniu momentem mechanicznym równym 20,0 Nm wynoszą odpowiednio dla biegu pierwszego  $1484,38 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$  i  $2947,21 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$ , sprawność silnika na poszczególnych jego biegach przy obciążeniu momentem mechanicznym równym 20,0 Nm wynoszą odpowiednio dla biegu pierwszego 0,9896 i dla biegu drugiego 0,9824. Momenty elektromagnetyczne rozwijane przez silnik w chwilach przełączeń z biegu I na II i odwrotnie wynoszą odpowiednio z biegu I na drugi 30,2975 Nm i z biegu II na I -26,8725 Nm.

### Zadanie 3

Kondensator płaski dwuwarstwowy składa się z dwóch różnych warstw dielektrycznych o przenikalnościach względnych  $\varepsilon_{r1} = 2,56$  i  $\varepsilon_{r2} = 1,98$ . Do kondensatora doprowadzono napięcie  $U = 125 \text{ V}$ . Grubości warstw wynoszą:  $d_1 = 0,65 \text{ cm}$  oraz  $d_2 = 0,85 \text{ cm}$ . Wyznacz wartości natężenia pola elektrycznego  $E_1$  i  $E_2$  oraz napięcia na poszczególnych warstwach kondensatora.

### Rozwiązanie

Kondensator ten można potraktować jako dwa kondensatory połączone szeregowo, w związku z czym napięcie doprowadzone do obwodu równe jest sumie napięć na poszczególnych warstwach. Ładunek każdej z warstw jest taki sam i wynosi  $Q$ .

W związku z powyższym:

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Z twierdzenia Gaussa dla analizowanego przypadku, wynika, że wektor indukcji elektrycznej w każdej warstwie ma tę samą wartość, zatem:

$$D_1 = D_2 = D$$

$$E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2$$

Stąd możliwe jest wyznaczenie:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$E_2 = \frac{E_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Po podstawieniu do wzoru na napięcie i przekształceniu, otrzyma się natężenia pól elektrycznych:

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2} = \frac{125}{0,65 + \frac{2,56}{1,98} \cdot 0,85} = 71,470 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

$$E_2 = \frac{E_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{71,470 \cdot 2,56}{1,98} = 92,406 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

A następnie wartości napięć:

$$U_1 = E_1 d_1 = 71,470 \cdot 0,65 = 46,455 \text{ V}$$

$$U_2 = E_2 d_2 = 92,406 \cdot 0,85 = 78,545 \text{ V}$$

Sprawdzenie:

$$U = U_1 + U_2 = 46,456 + 78,545 = 125,0 \text{ V}$$

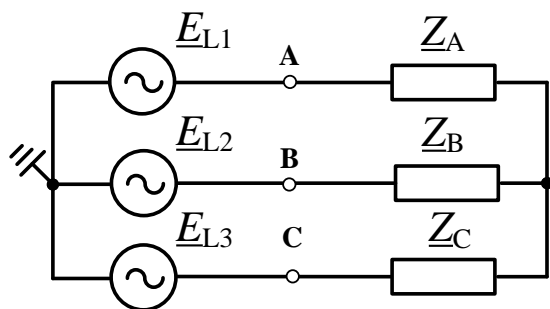
### Odpowiedź

Natężenia pola elektrycznego w poszczególnych warstwach wynoszą:  $E_1 = 71,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$  i  $E_2 = 92,4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ . Napięcie na poszczególnych warstwach kondensatora wynoszą odpowiednio:  $U_1 = 46,5 \text{ V}$ ;  $U_2 = 78,5 \text{ V}$ .

#### Zadanie 4

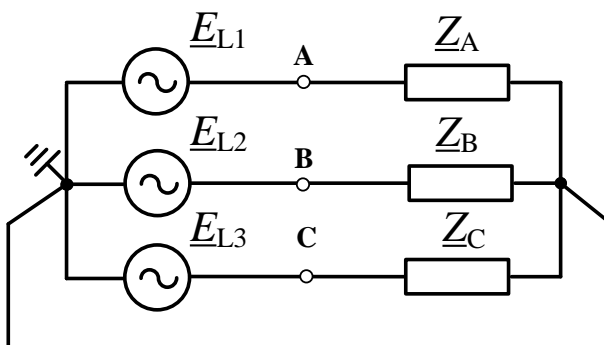
Odbiornik trójfazowy niesymetryczny skojarzony w gwiazdę z wyprowadzonym punktem gwiazdowym w pierwszym przypadku podłączony jest do symetrycznego trójprzewodowego układu zasilania (rysunek a) a w drugim przypadku podłączony jest do czteroprzewodowego symetrycznego układu zasilania (rysunek b). Czy sposób zasilania odbiornika niesymetrycznego wpłynie na zmianę mocy czynnej sieci elektroenergetycznej. Jeżeli będzie miała wpływ, wskaż jak i o ile się zmieni. Dane obwodu  $E_{L1} = E_{L2} = E_{L3} = 230,0 \text{ V}$ ,  $f = 50,0 \text{ Hz}$ ,  $\underline{Z}_A = 100 \Omega$ ,  $\underline{Z}_B = 10,0 \Omega$ ,  $\underline{Z}_C = 20,0 \Omega$ .

a)



trójprzewodowy układ trójfazowy

b)



czteroprzewodowy układ trójfazowy

Rysunek 3. Analizowane układy trójfazowe

#### Rozwiązanie

Odbiornik podłączono do symetrycznego, trójprzewodowego układu zasilania, w związku z czym, wartości napięć w postaci zespolonej wyniosą:

$$\underline{E}_{L1} = 230e^{j \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{180}} = 230,00j \text{ V}$$

$$\underline{E}_{L2} = 230e^{j \cdot (-120) \cdot \frac{\pi}{180}} = -115 - 199,1858j \text{ V}$$

$$\underline{E}_{L3} = 230e^{j \cdot 120 \cdot \frac{\pi}{180}} = -115 + 199,1858j \text{ V}$$

Obliczenie potencjału napięcia w punkcie  $V_0$  metodą potencjałów węzłowych:

$$\underline{V}_0 = \frac{\frac{\underline{E}_{L1}}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{E}_{L2}}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{E}_{L3}}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = -93,4375 - 62,2456j \text{ V}$$

Następnie obliczono prądy fazowe płynące w trójprzewodowym układzie trójfazowym:

$$\underline{I}_{L1} = \frac{\underline{E}_{L1} - \underline{V}_0}{\underline{Z}_A} = 3,2344 + 0,6225j \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L2} = \frac{\underline{E}_{L2} - \underline{V}_0}{\underline{Z}_B} = -2,1562 - 13,694j \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L3} = \frac{\underline{E}_{L3} - \underline{V}_0}{\underline{Z}_C} = -1,0781 + 13,0716j \text{ A}$$

Kolejnym krokiem jest obliczenie mocy pozornych w trójprzewodowym układzie trójfazowym:

$$\underline{S}_{L1} = \underline{E}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* = 743,9062 - 143,1648j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{L2} = \underline{E}_{L2} \cdot \underline{I}_{L2}^* = 2975,625 - 1145,3186j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{L3} = \underline{E}_{L3} \cdot \underline{I}_{L3}^* = 2727,6563 + 1288,4834j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{3P} = \underline{S}_{L1} + \underline{S}_{L2} + \underline{S}_{L3} = 6447,1875 - 9,0949 \cdot 10^{-13}j \text{ VA}$$

Następnie wykonano obliczenia dla trójprzewodowego układu:

$$\underline{V}_0 = 0 \text{ V}$$

$$\underline{I}_{L1} = \frac{\underline{E}_{L1} - \underline{V}_0}{Z_A} = 2,3j \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L2} = \frac{\underline{E}_{L2} - \underline{V}_0}{Z_B} = -11,5 - 19,9186j \text{ A}$$

$$\underline{I}_{L3} = \frac{\underline{E}_{L3} - \underline{V}_0}{Z_C} = -5,75 + 9,9593j \text{ A}$$

$$\underline{S}_{L1} = \underline{E}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* = 529j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{L2} = \underline{E}_{L2} \cdot \underline{I}_{L2}^* = 5290 + 1,4552 \cdot 10^{-12}j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{L3} = \underline{E}_{L3} \cdot \underline{I}_{L3}^* = 2645 - 7,276 \cdot 10^{-13}j \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{4P} = \underline{S}_{L1} + \underline{S}_{L2} + \underline{S}_{L3} = 8464 + 7,276 \cdot 10^{-13}j \text{ VA}$$

Moc czynna pobierana z sieci jest równa części rzeczywistej mocy pozornej:

– dla układu trójprzewodowego:

$$\underline{P}_{3P} = 6447,1875 \text{ W}$$

– dla układu czteroprzewodowego:

$$\underline{P}_{4P} = 8464 \text{ W}$$

Różnica w mocy czynnej:

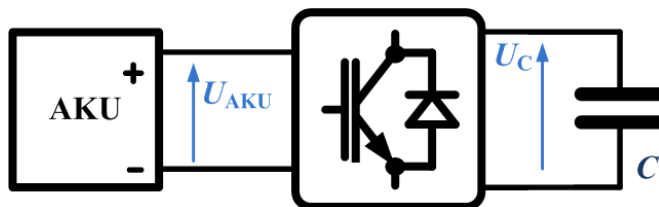
$$\Delta P = \underline{P}_{3P} - \underline{P}_{4P} = -2016,8125 \text{ W}$$

### Odpowiedź

Sposób zasilnia odbiornika niesymetrycznego wpływa na zmianę mocy czynnej sieci elektroenergetycznej, a różnica pomiędzy zasilaniem z układu trójprzewodowego, a czteroprzewodowego wynosi 2016,8125 W.

### Zadanie 5

Akumulator o napięciu znamionowym 24 V, prądzie znamionowym 20 A, prądzie zwarcia 320 A i pojemności ładunkowej 20 Ah podłączono do zacisków przekształtnika energoelektronicznego DC/DC o sprawności 0,97. Do zacisków po drugiej stronie przekształtnika podłączono idealny kondensator o pojemności 160 F, przechowujący aktualnie ładunek 2000 C. W pewnym momencie przekształtnik dokonał transferu pewnej części energii z kondensatora do akumulatora ze stałym prądem po stronie akumulatora i ze znamionową sprawnością, przenosząc w czasie 42 sekund ładunek równy 175 mAh. Należy przy tym założyć, że charakterystyka zewnętrzna akumulatora jest liniowa i stacjonarna.



Rysunek 4. Analizowany układ

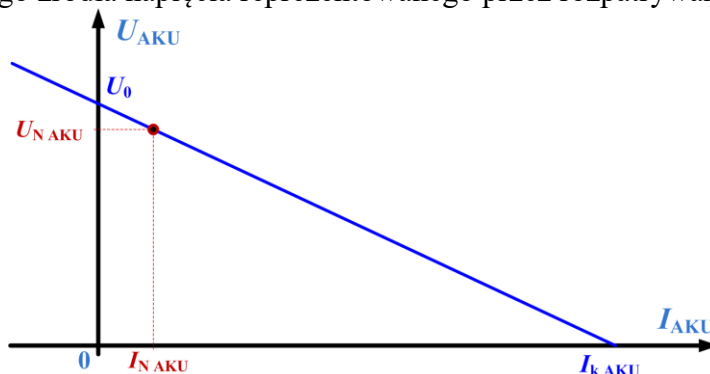
Jak w czasie trwania procesu ładowania stałoprądowego zmieniło się napięcie na zaciskach akumulatora w stosunku do napięcia znamionowego?

### Rozwiązanie

Oznaczenia danych w poniższym rozwiązaniu:

- $U_{N\ AKU} = 24\ V$
- $I_{N\ AKU} = 20\ A$
- $I_{k\ AKU} = 320\ A$
- $Q_{DC/DC \rightarrow AKU} = 175\ mAh$
- $T_{LOAD} = 42\ s$
- $c_{MAX} = 1$

Wzrost napięcia na zaciskach akumulatora podczas jego ładowania jest spowodowany istnieniem pewnej niezerowej rezystancji wewnętrznej (rozumianej jako rezystancja Thevenina źródła rzeczywistego). W związku z tym znamionowa wartość napięcia na zaciskach akumulatora  $U_{N\ AKU}$  utrzymuje się przy przepływie znamionowego prądu obciążenia  $I_{N\ AKU}$ . Prąd zwarcia  $I_{k\ AKU}$  występuje przy zwartych zaciskach akumulatora i jest ograniczony rezystancją wewnętrzną. Przy rozwartych zaciskach akumulatora panuje na nich napięcie stanu jałowego  $U_0$  (niewyszczególnione w danych). W związku z powyższym można naszkicować charakterystykę zewnętrzną rzeczywistego źródła napięcia reprezentowanego przez rozpatrywany akumulator.



Współczynnik kierunkowy tej prostej oraz wyraz wolny, potrzebne do opisu charakterystyki zewnętrznej akumulatora, są jeszcze nieznane. W celu ich wyznaczenia należy zapisać układ równań

$$\begin{cases} U_{N\ AKU} = a \cdot I_{N\ AKU} + U_0 \\ 0 = a \cdot I_{k\ AKU} + U_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań stanowi para liczb

$$\begin{cases} a = \frac{U_{N\ AKU}}{I_{N\ AKU} - I_{k\ AKU}} \\ U_0 = \frac{U_{N\ AKU} \cdot I_{k\ AKU}}{I_{k\ AKU} - I_{N\ AKU}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{24\ V}{20\ A - 320\ A} = -0,08 \\ U_0 = \frac{24\ V \cdot 320\ A}{320\ A - 20\ A} = 25,6\ V \end{cases}$$

W związku z powyższym równanie charakterystyki zewnętrznej, opisujące wartość napięcia na zaciskach przy danej wartości prądu, ma postać:

$$U_{AKU} = \frac{U_{N\ AKU} \cdot (I_{AKU} - I_{k\ AKU})}{I_{N\ AKU} - I_{k\ AKU}}$$

gdzie  $I_{AKU}$  jest zmienną niezależną, która przy pobieraniu energii z akumulatora przyjmuje wartość dodatnią, a przy dostarczaniu energii do akumulatora, wartość ujemną.

Ładunek  $Q_{DC/DC \rightarrow AKU}$  przesłany za pośrednictwem przekształtnika z kondensatora do akumulatora w procesie ładowania wynosił 175 mAh. Ponieważ podany ładunek jest przenoszony w gałęzi akumulatora (co wynika z treści zadania), to sprawność przekształtnika nie ma w tym kontekście znaczenia. Wiedząc, że  $[C] = [A \cdot s]$ , więc 1Ah to 3600 C, to:

$$Q_{DC/DC \rightarrow AKU} = 0,175\ Ah \cdot \frac{3600\ C}{1\ Ah} = 630\ C$$

Dane w postaci pojemności kondensatora i ładunku w nim zebranym są nadmiarowe, jednak na tym etapie widać, że  $Q_{SC} > Q_{DC/DC \rightarrow AKU}$ , zatem warunki są jak najbardziej realne.

Czas ładowania  $T_{LOAD}$  wynosił 42 sekundy. Wiedząc, że prąd to ilość ładunku przniesiona w czasie, a ładowanie odbywało się ze stałym prądem wymuszonym przez przekształtnik, to prąd ładowania wynosił:

$$I_{LOAD} = \frac{Q_{DC/DC \rightarrow AKU}}{T_{LOAD}}$$

$$I_{LOAD} = \frac{630\ C}{42\ s} = 15\ A$$

Podstawiając obliczoną wartość prądu (z ujemnym znakiem, bowiem kierunek jego przepływu podczas ładowania kondensatora jest przeciwny w stosunku do kierunku przy pobieraniu energii) do równania opisującego charakterystykę zewnętrzną akumulatora, otrzymuje się:

$$U_{LOAD} = \frac{U_{N\ AKU} \cdot ((-I_{LOAD}) - I_{k\ AKU})}{I_{N\ AKU} - I_{k\ AKU}}$$

$$U_{LOAD} = \frac{24\ V \cdot (-15\ A - 320\ A)}{20\ A - 320\ A} = 26,8\ V$$

Zatem poszukiwana różnica między napięciem ładowania a napięciem znamionowym wynosi:

$$\Delta U = U_{LOAD} - U_{N\ AKU}$$

$$\Delta U = 26,8\ V - 24\ V = 2,8\ V$$

**Odpowiedź:** Napięcie na zaciskach akumulatora w rozpatrywanym procesie ładowania wzrośnie względem napięcia znamionowego o 2,8 V.